Mathématiques 1 - Toutes filières
Durée : 4 heures

Problème I

Le plan affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé (Ox, Oy). Soit (C) la courbe d'équation cartésienne : $y = \text{ch}x - 1$; orientée dans le sens des x croissants.

1) Calculer la longueur de l'arc OA ; A étant le point de (C) d'abscisse x = 1 et O l'ori--gine du repère.

2) Calculer en un point M de (C) le vecteur tangent unitaire orienté $\vec{\tau}$, le vecteur nor--mal unitaire orienté $\vec{n}$ et le rayon de courbure R. Préciser les résultats obtenus en O.

3) On appelle cercle osculateur en un point M à une courbe (C) orientée, le cercle de rayon |R| et de centre Ω défini par : $\vec{M\Omega} = R\vec{n}$ avec R rayon de courbure en M à (C) et $\vec{n}$ vecteur normal unitaire orienté en M à (C). On se propose dans cette question de préciser les positions relatives en O de la courbe (C) d'équation : $y = \text{ch}x - 1$, de la parabole d'équation $y = \frac{1}{2}x^2$ et du cercle osculateur en O à (C). Pour cela, on réalisera les développements limités au voisinage de zéro de l'ordonnée y d'un point P du cercle osculateur dont on écrira l'équation (choisir la valeur de y la plus proche de zéro) et de la fonction chx - 1. Faire un schéma.

Problème II

Partie A

$f(x,t)$ est une fonction de R^2 dans R^2 de classe C_2. On considère l'équation différentielle aux dérivées partielles (E_1) suivante :

$$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} - 2\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = 0$$

1) Déterminer l'équation différentielle (E_2) vérifiée par la fonction $U(x,t) = e^t f(x,t)$ et ses dérivées partielles.

2) Déterminer l'équation différentielle (E_3) déduite de (E_2) par le changement de variables : $a = x + t$; $b = x - t$; on posera $U(x,t) = V(a,b)$

3) Déterminer l'équation différentielle (E_4) déduite de (E_3) que vérifie la fonction :

$$g(p) = V(a,b) \quad \text{avec :} \quad p = a.b$$

4) Déterminer l'équation différentielle (E_5) déduite de (E_4) par le changement de variable : $s = \sqrt{p}$ pour $p > 0$. On posera : $g(p) = h(s)$.

Partie B

Peut être traitée indépendamment de la partie A .

On considère l'équation différentielle (E) suivante :

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + xy = 0$$

1) Déterminer sous forme d'une série entière la solution $y_0(x)$ telle que : $y_0(0) = 1$

Préciser le domaine de définition de $y_0(x)$. (ne pas chercher à exprimer $y_0(x)$ à l'aide de fonctions usuelles)

2) Le but de cette question est de déterminer la solution générale de (E) sur R^{+*}.

a) On considère la suite (u_n) définie pour $n \in \mathrm{N}^*$ par : $u_n = (\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}) - \ln(n)$

Montrer, à l'aide de comparaison d'aires, que cette suite converge vers un nombre c tel que : $0 \leq c \leq 1$

b) Déterminer l'équation différentielle (E') déduite de (E) et vérifiée par $U(x)$ dans le changement de fonction inconnue :

$$y(x) = y_0(x)\ln(x) + U(x) \quad ; \quad x > 0$$

c) Déterminer sous forme de série entière la solution de (E') telle que $U_0(0) = 0$

On posera $U_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x^n$ et on montrera que les coefficients α_n vérifient :

$$\alpha_{2p+1} = 0 \; ; \; \alpha_{2p} = \frac{(-1)^{p+1}}{(p!)^2 2^{2p}} \delta_p \; ; \; \text{avec :} \; \delta_p = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} \quad ; \quad p \in N^*$$

En utilisant le a), déterminer le rayon de convergence de $U_0(x)$ et la solution générale de (E) sur R^{+*} en fonction de $U_0(x)$ et $y_0(x)$.

En déduire que les seules solutions définies sur R sont proportionnelles à $y_0(x)$.

Partie C

Peut être traitée indépendamment des parties A et B.

On pose : $y_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(n!)^2 2^{2n}}$

Le but de cette question est d'obtenir quelques renseignements sur la fonction $y_0(x)$ dans l'intervalle $I = [0,3]$

1) On pose : $K(x) = \int_0^1 \frac{\cos tx}{\sqrt{1-t^2}} dt$

a) Calculer $K(0)$

b) Montrer que $K(x)$ est absolument convergente pour x $\in R^+$.

c) Montrer, en justifiant les dérivations sous le signe intégral que $K(x)$ est solution de l'équation (E) de la partie B. En déduire la relation liant $K(x)$ et la fonction $y_0(x)$ définie dans la partie B.

2) a)

Calculer avec une erreur inférieure à 10^{-1} les valeurs de $y_0(1)$ et $y_0(2)$. Préciser les théorèmes utilisés. On admettra que $y_0(3) = -0,1$

b) Montrer en utilisant la forme intégrale trouvée en 1) pour $y_0(x)$ que sa dérivée $y'_0(x)$ est négative pour x $\in [0,3]$

c) A l'aide d'une interpolation linéaire entre les points A (2, $y_0(2)$) et B (3, $y_0(3)$) donner une valeur approchée du zéro de $y_0(x)$ sur l'intervalle $I = [0,3]$.

d) Représenter graphiquement à l'aide des renseignements obtenus dans cette partie la courbe représentative de la fonction $y_0(x)$ pour x $\in [0,3]$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail